Μάθημα 22ο | 05/06/2020

Θεώρημα 5.4.1

$D\subset\mathbb{C}$ ένας αστρόμορφος τόπος με κέντρο a
και $f:D\to\mathbb{C}$ συνεχής
και στο $D\setminus\{p\}$ ολόμορφη.
Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και έχει ως παράγουσα την:

$$F(z)=\int_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

Ειδικότερα για κάθε κλειστή καμπύλη $K\subset D$ ισχύει:

$$\int_K f(\zeta)\,d\zeta=0$$

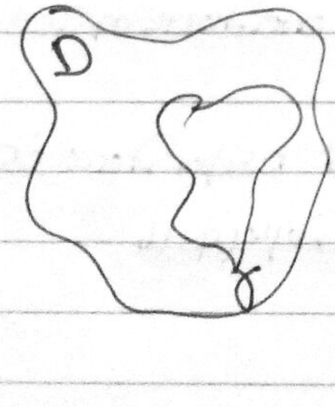
Αν $f:D\to\mathbb{C}$ ολόμορφη και $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{C}$ κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη με $\gamma([a,\beta])\subset D$ τότε ισχύει ο τύπος Cauchy. SOS-ARA

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = 2\pi i\,\delta_\gamma(z) f(z)}$$

όπου $\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta$: δείκτης στροφής

Σημείωση: Εδώ χρειάζομαι να ξέρω τις τιμές της f γύρω από την καμπύλη γ.

Σχήμα: SOS-ARA



$f: D\to\mathbb{C}$: ολόμορφη
γ: κατά τμήματα C^1: γνωστή
γενικός τύπος Cauchy:
Ξέρεις τις τιμές της f πάνω στη γ $\Rightarrow$ ξέρεις τις τιμές της f σε όλο το D
D: αστερόμορφος τόπος

Πόρισμα 5.4.1

Έστω $D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$: ολόμορφη
$\overline{D}(a,r) \subset D$, $r>0$ Τότε:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D(a,r)$$

όπου ο κύκλος $\partial D(a,r)$ κύκλος μια γύρω από το "a" και επειδή κάνει μόνο έναν γύρο (ωρολόγια) γύρω από το z τότε $\delta_\gamma(z) = 1$
Εάν το z είναι εκτός του $\partial D(a,r)$ τότε
$\delta_\gamma(z) = 0$

Πόρισμα 5.4.2 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Άσκηση να τα διαβάσουμε.
+
Ασκήσεις: Α.70 + Α.71 + Α.72.

§ 5.5. Αναλυτικότητα των Ολόμορφων Συναρτήσεων

Θεώρημα 5.5.1 :

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: D \to \mathbb{C}$, Τότε:
f : ολόμορφη $\Rightarrow$ f αναλυτική.

Εμείς είχαμε αποδείξει στο 4ο κεφάλαιο ότι μια f αναλυτική είναι και ολόμορφη.

Ειδικότερα η f έχει ολόμορφες μιγαδικές παραγώγους $f^{(k)}: D \to \mathbb{C}$ οσοδήποτε μεγάλης τάξης $k \in \mathbb{N}_0$, είναι άπειρες φορές πραγματικό διαφορίσιμη, $f \in C^{\infty}(D)$ και για κάθε $a \in D$, η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor (εφόσον f είναι αναλυτική) γύρω από το "a":

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad , z \in D(a,r)$$

$$R = \operatorname{dist}(a, \partial D)$$

όπου:

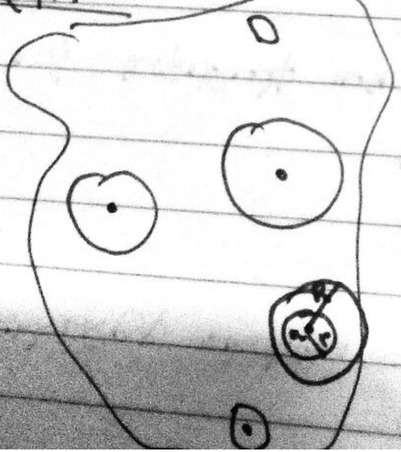
$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta \quad , r \in (0,R)$$

και γενικότερα για κάθε z που δεν είναι κέντρο του κύκλου ισχύει:

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \quad , r \in (0,R)$$
$$z \in \partial D(a,r)$$

<u>Χρησιμοποιώ τον τύπο Cauchy:</u>

Εφόσον f ολόμορφη $\to$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad , z \in \partial D(a,r)$



$R = \operatorname{dist}(a, \partial D)$

Λίγο πιο αναλυτικά: το 5.94, 5.95:

$$(5.93): \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

ομοιόμορφα πάνω στην $\partial D(a, r(a))$

$$\underset{\text{Πρόταση 5.31}}{\Rightarrow} \int_{\partial D(a, r(a))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D(a, r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} (z-a)^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r(a))} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{\overset{\text{τύπος}}{\underset{\text{Cauchy}}{=}} f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, r(a))} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta}_{= c_n(a)} \right) (z-a)^n$$

Για 5.27 : Παράδειγμα 4.4.2. $\zeta = z_0$

Συνέπειες του Ολοκληρωτικού Θεωρήματος Cauchy.

Θεώρημα 5.6.1 (Θεώρημα Liouville)

Κάθε ακέραια συνάρτηση και φραγμένη $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι σταθερή

Απόδειξη: Διαβάστε την.

Πόρισμα 5.6.1 Θεμελιώδες Θεώρημα Άλγεβρας $\Rightarrow$
+ Θεώρημα Morera

Να τα διαβάσουμε εμείς.

Προσοχή: ③ Θεώρημα επέκτασης Riemann + Θεώρημα Μοναδικότητος

Θεώρημα επέκτασης Riemann

$D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό, $A \subset D$ διακριτό και κλειστό.

$f : D \setminus A \to \mathbb{C}$: ολόμορφη. Τότε Τ.Α.Ε.Ι.:

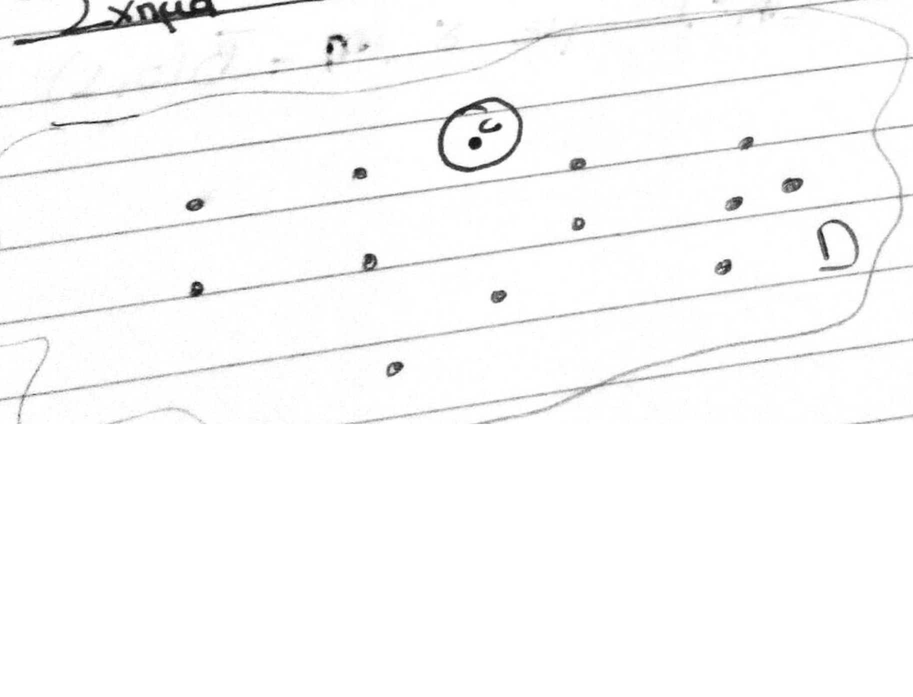
(α) η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη πάνω από το A
δηλαδή $\exists\ F : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με $F|_{D \setminus A} = f$

(β) η f είναι ολόμορφα επεκτάσιμη πάνω από το A
δηλαδή υπάρχει $F : D \to \mathbb{C}$ συνεχής με $F|_{D \setminus A} = f$.

(γ) για κάθε $c \in A$ υπάρχει περιοχή του c στην οποία η f είναι φραγμένη.

(δ) για κάθε $c \in A$: $\lim\limits_{z \to c} (z-c) f(z) = 0$.

Σχήμα :



$\circ\circ\circ\circ = A \subset D$

$f : D \setminus A \to \mathbb{C}$
↳ ολόμορφη.

$D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό

Θεώρημα Ταυτότητας / Μοναδικότητας

Έστω $D \subset \mathbb{C}$: ανοιχτός + συνεκτικός.

και $f, g : D \to \mathbb{C}$: ολόμορφες

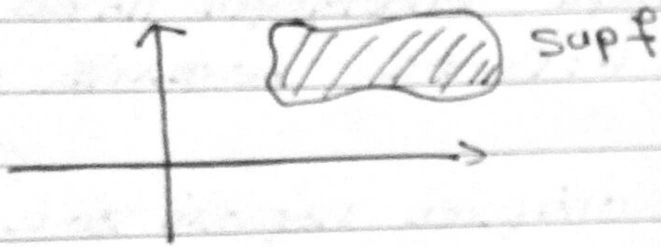
$f(w_m) = g(w_m)$.

για $(w_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset D$ με $w_m \to w \in D$

$\Rightarrow f = g$

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ τα σημεία στα οποία $f(x,y) \neq 0$ έχουν φραγμένη κλειστή θήκη και $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$



$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , x \in B(0,1). \\ 0 & , \text{αλλού}. \end{cases}$$

$\Rightarrow \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\operatorname{sup} \eta = \overline{B}(0,1)$

Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Ορισμός: Έστω $D \subset \mathbb{C}$: ανοιχτό. Ένα σημείο $c \in D$ ονομάζεται μεμονωμένη ανωμαλία της f αν η $f: D \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη.

Πρέπει να γνωρίζουμε ορισμούς:

- Μεμονωμένες ανωμαλίες
- Επουσιώδης
- Πόλοι
- Ουσιώδης ανωμαλία.
- Θεώρημα Casorati-Weierstrass
- Μερόμορφη Συνάρτηση
- Ότι αποδείξεις έχει στον παράγραφο

με τις μεμονωμένες ανωμαλίες είναι εκτός ύλης.

- Σειρές Laurent

  +

- Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

→ εκτός ύλης